Proxima

第 2 回
OnlineMathContest
Proxima Technology 杯

本選

2025 年 11 月 29 日 10:00–20:00

第 1 問

p 進数は現代の整数論において基本的かつ重要な概念である．p 進数の理論が有効な例として，ディオファントス方程式の整数解の決定問題を考える．以下の問について，導出過程を説明しつつ解答を記述せよ．ただし，本問に登場する数学的概念 ($\mathbb{Q}_p$ や $|\cdot|_p$ 等) の定義については，次ページに続く**補足**を参照すること．

n を正の整数，T を変数とし，$P(T) := T^3 + 3nT - 1$ とおく．また，$P(T)$ の根の一つを α とする．

(1) $P(T)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ．また，体 $K := \mathbb{Q}(\alpha)$ の整数環 $\mathcal{O}_K$ の単数群 $\mathcal{O}_K^*$ のねじれ部分群は $\{1, -1\}$ に等しいことを示せ．

(2) $P(T)$ が $\mathbb{Q}_3$ 上既約であるための必要十分条件は，n が 3 で割り切れないことである．これを証明せよ．

以下では，正の整数 n は以下の 2 条件を満たすものとする (このような n は存在することが知られている)．

- n は 3 で割り切れない．
- 整数環 $\mathcal{O}_K$ の任意の単数 u に対して，ある整数 s が存在して，$u = \alpha^s$ または $u = -\alpha^s$ と表せる．

$\widehat{K} := \mathbb{Q}_3(\alpha)$ とおく．

(3) 任意の $z \in \mathbb{Z}_3$ に対し，$f(z) := \exp_3(z \log_3(\alpha^3))$ は $\widehat{K}$ の位相で収束することを示せ．ただし $\widehat{K}$ の位相は，**補足**の (3 進絶対値から誘導される) ものとする．

(4) $f(z)$ は $\mathbb{Z}_3$ 上の z の関数として，以下の形で表すことができる．

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (c_{0,j} + c_{1,j}\alpha + c_{2,j}\alpha^2) z^j$$

ただし，$c_{i,j} \in \mathbb{Q}_3$ である．このとき，$|c_{i,j}|_3 > 3^{-3}$ となるような組 (i, j) をすべて求めよ．

(5) 方程式 $x^3 + 3nxy^2 - y^3 = 1$ の整数解 (x, y) は $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 3n)$ に限られることを証明せよ．必要なら，以下の定理を用いてもよい．

Strassmann の定理

零でない冪級数 $F(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \mathbb{Q}_p[[X]]$ が $\mathbb{Z}_p$ 上で収束しているとする．このとき $\lim_{i\to\infty} |a_i|_p = 0$ であることに注意する．N を $|a_N|_p = \max_i |a_i|_p$ を満たす最大の非負整数とする．このとき，$F(z) = 0$ を満たす $z \in \mathbb{Z}_p$ は高々 N 個である．

記号の定義についての補足

素数 p と整数 n に対し, p **進付値**と呼ばれる写像 $v_p\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ を以下で定める.

$$v_p(n) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid n \equiv 0 \pmod{p^k}\} & (n \neq 0), \\ \infty & (n = 0). \end{cases}$$

また, 有理数体 $\mathbb{Q}$ における p **進絶対値** $|\cdot|_p\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は, 有理数 $x = a/b$ (a, b は整数で $b \neq 0$) に対して

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p = \begin{cases} p^{-(v_p(a)-v_p(b))} & (a \neq 0), \\ 0 & (a = 0) \end{cases}$$

と定義される (この定義は x の分数表示に依存せずに定まる).

$x, y \in \mathbb{Q}$ に対して $|x-y|_p$ を x, y の p **進距離**と呼ぶ. 集合 $\mathbb{Q}$ において, p 進距離は距離の公理を満たす. この距離に関する $\mathbb{Q}$ の完備化を $\mathbb{Q}_p$ と書く. $\mathbb{Q}$ の四則演算は p 進距離について連続であるため, $\mathbb{Q}_p$ には $\mathbb{Q}$ の演算を連続に拡張した四則演算が誘導される. また, 完備化の普遍性から $|\cdot|_p$ は連続関数 $|\cdot|_p\colon \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に延長され, かつ $(x, y) \longmapsto |x-y|_p$ は完備化 (の定義) の距離と一致する. このように得られる位相体 $\mathbb{Q}_p$ を p **進数体**という. $\mathbb{Q}_p$ の部分集合

$$\mathbb{Z}_p \coloneqq \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

は $\mathbb{Q}_p$ の部分環であり, これを p **進整数環**という.

より一般に, p 進絶対値を $\mathbb{Q}_p$ の任意の有限拡大体 L 上で定義することができる. L の $\mathbb{Q}_p$ 上のノルム (写像) を $\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}_p}$ とする. このとき写像

$$|\cdot|_p\colon L \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; \quad x \longmapsto |x|_p \coloneqq |\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}_p}(x)|_p^{1/[L:\mathbb{Q}_p]}$$

は L 上の乗法付値 (絶対値) を定め, 写像

$$L \times L \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; \quad (x, y) \longmapsto |x-y|_p$$

は L 上の距離を定めることが知られている. この距離の部分体 $\mathbb{Q}_p$ への制限は p 進距離と一致し, p 進距離の標準的な拡張となっている.

関数論の場合と同様に, 有理数係数の形式的冪級数

$$\exp_p(X) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}, \quad \log_p(X) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(X-1)^k$$

は L のある部分集合上で (L の位相で) 収束する. これらをそれぞれ p **進指数関数**, p **進対数関数**という.

第 2 問

(M,g), (N,h) をそれぞれ Riemann 多様体とする．C^∞ 級写像 $F\colon M \longrightarrow N$ が共形写像であるとは, M 上のある C^∞ 級正値関数 u が存在して $F^*h = ug$ となることをいう．ここで, F^*h は F による h の引き戻し計量である．F が共形写像かつ微分同相写像のとき F を共形同相写像という．共形同相写像 F の逆写像 $F^{-1}\colon N \longrightarrow M$ もまた共形写像であることに注意する．そこで, (M,g) と (N,h) の間に共形同相写像 F が存在するとき, 2 つの Riemann 多様体 (M,g) と (N,h) は共形同値であるという．さらに, (M,g) 上の共形変換群 $\mathrm{Conf}(M)$ を

$$\mathrm{Conf}(M) \coloneqq \{F\colon M \longrightarrow M \mid F \text{ は共形同相写像 }\}$$

で定義する．

以下, n を 2 以上の整数とし, M として n 次元単位球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ を考える．S^n には $\mathbb{R}^{n+1}$ の Euclid 計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の引き戻しで定まる標準計量 g_{can} を入れて Riemann 多様体 (S^n, g_{can}) とみなしておく．以下の問について, 導出過程を説明しつつ解答を記述せよ．

(1) n 次元単位球面 S^n の北極 $p_N \coloneqq (0, \ldots, 0, 1)$ に関する立体射影 $\Pi_{p_N}: S^n \setminus \{p_N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ により, $(S^n \setminus \{p_N\}, g_{\mathrm{can}})$ と $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は共形同値になることを示せ.

(2) 任意に固定したベクトル $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ を用いて, S^n 上の C^∞ 級ベクトル場 A を

$$A(x) \coloneqq a - \langle a, x \rangle x \quad (x \in S^n)$$

で定義する．ベクトル場 A が生成する S^n 上の 1-パラメータ変換群を $\{\gamma_t^a\}_{t \in \mathbb{R}}$ とするとき, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\gamma_t^a \in \mathrm{Conf}(S^n)$ であることを示せ.

(3) ベクトル $a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ および実数 $t \in \mathbb{R}$ を任意に固定する．(2) により, γ_t^a による標準計量 g_{can} の引き戻し計量 $(\gamma_t^a)^* g_{\mathrm{can}}$ は, S^n 上のある C^∞ 級正値関数 α_t を用いて $(\gamma_t^a)^* g_{\mathrm{can}} = \alpha_t g_{\mathrm{can}}$ と表せる．このとき, 正値関数 α_t を初等関数を用いて表せ.

(4) (2) の γ_t^a を用いて

$$\mathrm{Conf}(S^n) = \{r \circ \gamma_t^a \mid r \in \mathrm{O}(n+1),\ t \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

と表せることを示せ．ただし, $\mathrm{O}(n+1)$ は $n+1$ 次の直交群である．解答に際し, 必要であれば以下の**事実**を用いてもよい.

事実

$n \geq 2$ のとき, $\phi \in \mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n)$ で $\lim_{|x| \to \infty} |\phi(x)| = \infty$ を満たすものは, $\lambda > 0$, $U \in \mathrm{O}(n)$ および $b \in \mathbb{R}^n$ を用いて

$$\phi(x) = \lambda U x + b \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

の形に表せるものに限る.

第 3 問

$[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ 上の可測関数 $k(x,y) = -\log|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)|$ について考える．以下の問について，導出過程を説明しつつ解答を記述せよ．ただし，$k \in L^2([0,1]^2)$ であることは認めてよい．

(1) $0 < x < 1$ に対して，次の Cauchy の主値を計算せよ．

$$\mathrm{p.v.} \int_0^1 \frac{dy}{\cos(\pi x) - \cos(\pi y)}$$

(2) 正の整数 n と $0 < x < 1$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^1 k(x,y)\cos(n\pi y)\,dy = \frac{1}{n}\cos(n\pi x)$$

(3) L^2 ノルム $\|k\|_{L^2}$ を求めよ．また，$k_1, k_2 \in L^2([0,1]^2)$ であって

$$k(x,y) = \int_0^1 k_1(x,z)k_2(z,y)\,dz \quad \text{a.e. } (x,y) \in [0,1]^2$$

を満たすものが存在しないことを示せ．

(4) 以下の問いのうち，**どちらか一方**に解答せよ．

(a) 独立同分布な確率変数の列 $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ は，各 X_n が $[0,1]$ 上の一様分布に従うとする．また，

$$Y_n := n\min\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad Z_n := \mathbb{E}[k(X_0, X_n)Y_n | X_n] \quad (n \geq 1)$$

とおく．このとき，列 $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ はある定数に確率収束することを示し，その値を求めよ．

(b) 連続関数 $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ は

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

を満たしているとする．また，$u\colon [0,1] \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ が積分方程式

$$\int_0^t u(x,s)\,ds + \frac{1}{\pi}\int_0^1 k(x,y)u(y,t)\,dy = f(x)$$

を満たしているとする． 関数 $u(x,t)$ が $[0,1] \times [0,\infty)$ 上連続であるならば，内部 $(0,1) \times (0,\infty)$ で調和関数，すなわち

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

が成り立つことを示せ．また，次を示せ．

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |u(x,t)| = 0$$

第 4 問

n, d を正の整数とし, 単純無向グラフ $G = (V, E)$ に対する以下の条件 $\mathrm{P}(n, d)$ を考える.

条件 $\mathrm{P}(n, d)$

1. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ を頂点集合として持つ.
2. G の任意の頂点の次数は d である.
3. G は完全グラフではない.
4. 任意の辺 $\{v, w\} \in E$ は, ちょうど 6 個の 3 サイクルに含まれる.
5. 任意の隣接しない頂点対 $\{v, w\} \notin E$ は, ちょうど 6 個の 4 サイクルの隣接しない頂点対として含まれる.

以下では, 条件 $\mathrm{P}(n, d)$ を満たすグラフ G が存在するための n および d に関する必要条件について考察する. 以下の問について, 導出過程を説明しつつ解答を記述せよ. (グラフ理論の用語については, 次のページの補足を参照してもよい.)

(1) G の隣接行列を $A = (a_{ij})$ とおく. 行列 A^2 の (i, j) 成分 b_{ij} を求めよ.
(2) n, d は $n = \frac{1}{4}(d^2 - 3d + 4)$ を満たすことを証明せよ.
(3) $(n, d) = (28, 12), (352, 39)$ であることを証明せよ.

なお, 条件 $\mathrm{P}(28, 12)$ を満たすグラフ, 条件 $\mathrm{P}(352, 39)$ を満たすグラフが実際に存在することが知られている.

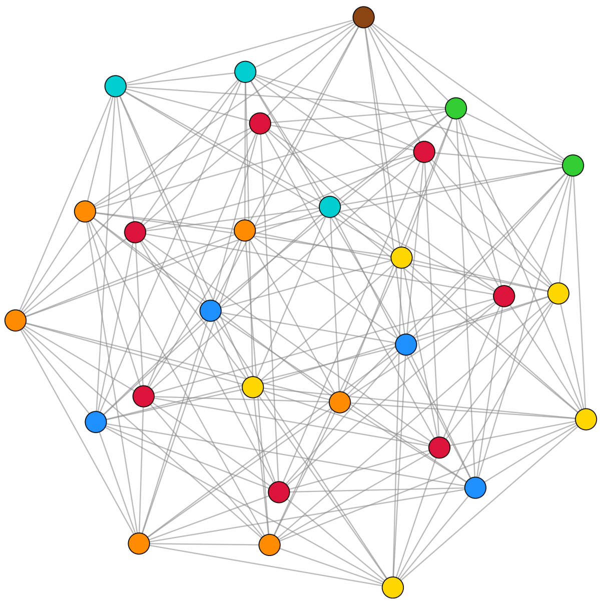

図 1　条件 $\mathrm{P}(28, 12)$ を満たすグラフの例

グラフ理論に関する補足

有向グラフ, 多重グラフ, 自己ループを許すグラフなどを扱う場合は, その都度明示的に定義を与える. 断りのない限り, 下記の「有限単純無向グラフ」を用いる.

- 有限集合 $V \neq \emptyset$ と集合 E の順序対
$$G = (V, E)$$
であって, $E \subseteq \binom{V}{2}$ を満たすものを**グラフ**と呼ぶ. ここで,
$$\binom{V}{2} \coloneqq \{\{u, v\} \mid u,\, v \in V,\ \ u \neq v\}$$
である. V の元を**頂点** (または**ノード**) といい, E の元を**辺**という.
- $E = \binom{V}{2}$ であるようなグラフ G を**完全グラフ**という. $|V| = n$ である完全グラフ G を K_n とも書く.
- 異なる頂点 $u,\, v \in V$ について $\{u,\, v\} \in E$ のとき, u と v は**隣接している**といい, $u \sim v$ (または $v \sim u$) と書く.
- G の相異なる頂点 $v_1,\ \ldots,\ v_k$ $(k \geq 2)$ が
$$v_1 \sim v_2,\ v_2 \sim v_3,\ \ldots,\ v_{k-1} \sim v_k,\ v_k \sim v_1$$
を満たすとする. 辺 e_i を
$$e_i = \begin{cases} \{v_i,\, v_{i+1}\} & (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k-1), \\ \{v_k,\, v_1\} & (i = k) \end{cases}$$
とおく. このとき, グラフ $(\{v_1,\, \ldots,\, v_k\},\, \{e_1,\, \ldots,\, e_k\})$ を G の k **サイクル**という.
- G の頂点 v に隣接する頂点の個数
$$\deg_G(v) \coloneqq \bigl|\{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}\bigr|$$
を v の**次数**と呼ぶ.